

תרגיל 5

שאלה 1

במעקב אחרי 10,000 משוחרר צבא בארה"ב נבדקה השפעת עישון על תוחלת החיים. במחקר דווח על מספר הסיגריות הממוצע שעישן כל פרט (x) וגיל המוות (y). ברגרסיה המבוססת על מדגם זה התקבלה התוצאה: $y = a - 0.2x + e$, כאשר המספר בסוגריים הוא סטיית התקן של מקדם הרגרסיה. (0.02)

אורך החיים הממוצע של המשתתפים במדגם היה 68 עם שונות של 4, ומספר הסיגריות הממוצע במדגם היה 10 סיגריות ליום.

א. חשבו את a .

ב. מהי משמעותם של מקדמי הרגרסיה.

ג. בנו רווח בר סמך (ברמת בטחון של 95%) להשפעה השולית של x על y .

ד. בדקו את ההשערה כי לעישון אין השפעה על אורך החיים. בנה לוח ניתוח שונות לבדיקה זו.

ה. מהו אומדן אורך החיים הממוצע של פרטים הצורכים 20 סיגריות ליום? של פרטים שאינם מעשנים?

ו. בנו רווח בר סמך (ברמת בטחון 95%) לכל אחת מהתחזיות בסעיף הקודם.

ז. מהו אורך החיים של פרט מסוים המעשן 20 סיגריות ליום? מהו אורך החיים החזוי של פרט זה אילו לא היה מעשן?

ח. בנו רווח בר סמך (ברמת בטחון 95%) לכל אחת מהתחזיות בסעיף הקודם.

ט. מתי לדעתכם החיזוי יהיה מדויק יותר, כאשר $x=9$ או כאשר $x=20$? הסבירו.

שאלה 2

הוכח:

$$r^2(x, y) = r^2(ax + b, cy + d) \quad \text{א.}$$

$$R^2 = r^2 \hat{y} \hat{y} = r^2 xy \quad \text{ב.}$$

ג. במודל רגרסיה ריבועים פחותים (OLS) עם שני משתנים, השונות של y ניתנת

לפירוק לשני מרכיבים: שונות מוסברת + שונות בלתי מוסברת.

שאלה 3

להלן נתונים אודות מחירים וכמויות של תפוזים שנמצאו בסופרמרקט ב-12 ימים. יהי x_i המחיר הנדרש ו- y_i כמות שנמכרה ביום:

130	130	115	125	110	80	105	90	100	90	70	55	כמות
50	55	60	60	65	70	70	70	70	80	90	100	מחיר

הניחו שלעקומת הביקוש צורה $y_i = \alpha + \beta x_i + u_i$ וכל ההנחות הקלאסיות מתקיימות.

א. חשבו אומדני ריבועים פחותים ל- α ול- β .

ב. אמדו את גמישות המחיר עבור המחיר הממוצע.

ג. חשבו את המקדמים במשוואה $x_i = a' + b'y_i + e_i$.

ד. כיצד ישתנו תשובותיכם ל-א' ול-ב' אם המחיר נמדד באגורות ולא בש"ח.

ה. כיצד ישתנו תשובותיכם ל-א' ול-ב' אם הכמות נמדדת בפאונד במקום בק"ג (Pound=0.45Kg)?

ו. חשבו את $\hat{\sigma}_a^2, \hat{\sigma}_b^2, \hat{\sigma}_e^2$.

ז. בדקו את ההשערה שהכמות המבוקשת בלתי תלויה במחיר.

ח. בדקו את ההשערה ששיפוע עקומת הביקוש הוא (-1).

ט. בנו רווח בר סמך ל- β ברמת מובהקות של 5%.

שאלה 4

נתון המודל $y_t = \alpha + \beta \cdot x_t + u_t$. חווה דעתך על הטענות הבאות:

א. התחזית עבור ערך ספציפי של y כאשר נתון ערך x_0 הצפוי, $y|x_0$ זהה בהכרח

לתחזית עבור הערך הממוצע $E(y|x_0)$.

ב. רווח הסמך עבור תחזית לערך ספציפי $(y|x_0)$ שווה לרווח הסמך עבור התחזית

לערך הממוצע $E(y|x_0)$ כאשר התחזית מתייחסת לממוצע ערכי x_t במדגם

$$(x_0 = \bar{x}).$$

שאלה 5

במחקר סוציו-כלכלי נחקר הקשר בין הכנסותיהם החודשיות (במאות שקלים) של זוגות אחים.

נסמן ב- X את הכנסותיו של האח המבוגר שבזוג האחים וב- Y את הכנסותיו של האח הצעיר.

במדגם שגודלו $n=16$ התקבלו התוצאות הבאות:

$$\text{ברגרסיה: } y = \alpha_1 + \beta_1 \cdot x + u_1 \quad \text{התקבל: } \hat{\alpha}_1 = 30 \quad \hat{\beta}_1 = 1/3 \quad \sum Y^2 = 40,000$$

$$\text{ברגרסיה: } x = \alpha_2 + \beta_2 \cdot y + u_2 \quad \text{התקבל: } \hat{\alpha}_2 = 15 \quad \hat{\beta}_2 = 2/3$$

א. אקונומטריקאי חישב והסיק מהתוצאות הנ"ל:

1. ממוצע הכנסות האחים המבוגרים במדגם שווה לממוצע ההכנסות של האחים הצעירים ושניהם שווים ל-45 (במאות שקלים לחודש).

2. מקדם המתאם בין הכנסות האחים קטן מ-1/2

3. התפלגות הכנסות האחים המבוגרים במדגם פחות שוויונית מהתפלגות הכנסות האחים הצעירים (השתמש בשונות כמדד אי-שוויון הכנסות). האם האקונומטריקאי צדק בממצאיו? הוכיחו את תשובתכם.

ב. ברמת מובהקות 5%:

1. בדקו את ההשערה שלא קיים קשר בין הכנסות האחים.

2. הראו ש- $\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_2} = 1/3$ וחשב את $\hat{\sigma}_{\hat{\alpha}_2}$

3. בדקו באמצעות משוואת הרגרסיה השניה את ההשערה שהכנסות האחים בני אותו זוג שוות $(Y_i = X_i)$. בדוק בנפרד:

א. את ההשערה ביחס ל- β_2

ב. את ההשערה $H_0: \alpha_2 = 0$

4. חווה דעתך על התוצאות שקבלת בשאלות ב1- וב3-.

5. אם ברצונך לאמוד מחדש את המשוואה השניה וביכולתך לבחור בין שני מדגמים זהים בגודלם, האחד בו הכנסות האחים הצעירים נעות (בצורה אחידה) (פחות או יותר) בין 50 (מאות שקלים לחודש) לבין 130, והשני בו הכנסות האחים נעות בין 25 לבין 155. במה תבחר? נמק!

ג.

1. ידוע שהכנסתו של האח המבוגר, במשפחה שאינה כלולה במדגם, היא 48 (מאות שקלים לחודש). מה לדעתך הכנסתו החודשית של אחיו הצעיר?

2. כיצד תבנה רווח בר סמך להכנסתם הממוצעת של כלל האחים המבוגרים שאחיהם הצעירים מהם משתכרים 52 (מאות שקלים) לחודש? (הסבר כיצד תבנה אותו, אל תחשב!).

3. כיצד תבנה רווח בר סמך להכנסתו של אח מבוגר שאחיו הצעיר ממנו משתכר 52 (מאות שקלים) לחודש (הסבר, אל תחשב).

4. הסבר את משמעותם של רווחי הסמך ב-(2) וב-(3). עמוד על ההבדל ביניהם.

5. מתי לדעתך יהיה החיזוי מדויק יותר, כאשר חוזים את הכנסתו של האח המבוגר שאחיו הצעיר משתכר 50 (מאות שקלים) לחודש או 41.5 לחודש? נמק!

6. מתי לדעתך יהיה החיזוי המדויק יותר, כאשר חוזים את הכנסתו של האח הצעיר שהכנסת אחיו המבוגר 45 (מאות שקלים) לחודש או כאשר חוזים את הכנסתו של האח המבוגר שהכנסת אחיו הצעיר 45 בחודש? נמק!

7. נתון שרוחבו של רווח בר הסמך (ברמת בטחון של 95%) להכנסתו החזויה של האח הצעיר, שהכנסת אחיו המבוגר הוא 39 לחודש, הוא 7.6. חשב את רווח בר הסמך.

שאלה 6

נתון המודל $y_t = \alpha + \beta \cdot x_t + u_t$. חווה דעתך על הטענות הבאות:

- התחזית עבור ערך ספציפי של y כאשר נתון ערך x_0 הצפוי, $y|x_0$ זהה בהכרח לתחזית עבור הערך הממוצע $E(y|x_0)$.
- רווח הסמך עבור תחזית לערך ספציפי $(y|x_0)$ שווה לרווח הסמך עבור התחזית לערך הממוצע $E(y|x_0)$ כאשר התחזית מתייחסת לממוצע ערכי x_t במדגם $(x_0 = \bar{x})$.

שאלה 7

נתון קו רגרסיה $\hat{y}_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x_i$ מה יהיה קו הרגרסיה U כפונקציה של V אם: $V_i = ax_i + b$, $U_i = cy_i + d$.

שאלה 8

- למציאת הקשר בין הציון בקורס סטטיסטיקה א' (x) לבין הציון בקורס סטטיסטיקה ב' (y) נלקח מדגם של 20 תלמידים והתקבל: $\hat{y}_i = 10 + 0.8x_i$.
- א. ציוניו של תלמיד שהתקבל באיחור הינם בדיוק $(\bar{x}, \bar{y})$. כיצד ישתנו קו הרגרסיה ו- R אם נוסיף את התלמיד הנ"ל?
- ב. ציוניו של תלמיד שהתקבל באיחור הם $x=70$ $y=66$. כיצד ישתנו קו הרגרסיה ו- R אם נוסיף תלמיד זה?

שאלה 9

חוקר א' אמד את המודל הבא מתוך מדגם של 32 תצפיות: $Y_i = \alpha + \beta \cdot X_i + u_i$. ההנחות הקלאסיות מתקיימות. לרשותו עומדים הנתונים הבאים:

$$\bar{X} = \bar{Y} = 20$$

$$\sum X_i^2 = 18,000$$

$$\sum Y_i^2 = 16,000$$

$$\sum X_i Y_i = 15,400$$

$$\hat{\sigma}_u^2 = 63$$

- חשב את האומדנים ל- α ו- β .
- מצא את R^2 ואת $\text{adj}R^2$.
- בנה לוח ניתוח שונות.
- חשב רווח סמך ל- Y_i עבור $X_i=30$ ברמת בטחון 0.95.
- חוקר ב' אמד את המודל: $Z_y = \alpha' + \beta' \cdot Z_x + u'_i$

$$\text{כאשר: } Z_x = \frac{x - \bar{x}}{s_x} \quad Z_y = \frac{y - \bar{y}}{s_y}$$

חשב את האומדנים ל- α' ול- β' .